CHAPITRE X : CONTINUITÉ

Correction

Introduisons la fonction

$$g : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}.$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ car f l'est.

a) Méthode 1 : On a $f([a,b]) \subset [a,b]$ donc $a \leqslant f(a) \leqslant b$ et $a \leqslant f(b) \leqslant b$. Par conséquent, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $g(\gamma) = 0$. Autrement dit,

$$\exists \gamma \in [a,b], \quad f(\gamma) = \gamma.$$

Méthode 2 : La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. En notant $m = \min\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad f([a,b]) = [m,M].$$

Puisque $f([a,b]) \subset [a,b]$, on a $[m,M] \subset [a,b]$ ce qui nous autorise à considérer $f(m)$ et $f(M)$. Ceux-ci vérifient

$$g(m) = f(m) - m \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(M) = f(M) - M \leqslant 0.$$

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $g(\gamma) = 0$. Autrement dit,

$$\exists \gamma \in [a,b], \quad f(\gamma) = \gamma.$$

b) Méthode 1 : On a $a \in [a,b] \subset f([a,b])$. Donc il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $a = f(\alpha)$. De la même manière, il existe $\beta \in [a,b]$ tel que $b = f(\beta)$. Alors

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leqslant 0 \quad \text{et } g(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \beta \geqslant 0.$$

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $g(\gamma) = 0$. Autrement dit,

$$\exists \gamma \in [a,b], \quad f(\gamma) = \gamma.$$

Méthode 2 : La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. En notant $m = \min\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}$, il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que $m = f(c)$ et $M = f(d)$. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$m = f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d) = M \quad \text{et} \quad f([a,b]) = [m,M].$$

Puisque $[a,b] \subset f([a,b])$, on a $[a,b] \subset [m,M]$. On peut alors écrire

$$g(c) = f(c) - c = m - c \leqslant 0 \quad \text{et } g(d) = f(d) - d = M - d \geqslant 0$$

puisque $c \in [a,b] \in [m,M]$ et $d \in [a,b] \in [m,M]$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $g(\gamma) = 0$. Autrement dit,

$$\exists \gamma \in [a,b], \quad f(\gamma) = \gamma.$$

La fonction f admet un point fixe.