CHAPITRE X : CONTINUITÉ

Correction

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x - x_0| \leqslant \eta = \varepsilon$, on a immédiatement

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \leqslant \eta = \varepsilon.$$

Par conséquent, la fonction f est continue en tout réel de $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est quant à elle continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$[g(x)]^2 = [f(x) - f(0)]^2 = |f(x) - f(0)|^2 = |x - 0|^2 = |x|^2 = x^2.$$

Grâce à cette expression de $[g(x)]^2$, on a d'une part

$$[g(x) - g(y)]^2 = [g(x)]^2 - 2g(x)g(y) + [g(y)]^2 = x^2 - 2g(x)g(y) + y^2$$

et d'autre part, on peut également écrire

$$[g(x) - g(y)]^2 = [f(x) - f(y)]^2 = |f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

En comparant ces deux expressions de $[g(x) - g(y)]^2$, il vient $g(x)g(y) = xy$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant le résultat précédent, on a $g(x)g(1) = x$. Puisque $[g(1)]^2 = 1^2 = 1$, on en déduit $g(1) = \pm 1$ ce qui donne $g(x) = \pm x$ puis $f(x) = g(x) + f(0) = \pm x + f(0)$. Par conséquent, la fonction f est de la forme $x \mapsto \pm x + b$ avec $b \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si f est de la forme $x \mapsto \pm x + b$ avec $b \in \mathbb{R}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire

$$|f(x) - f(y)| = | \pm x + b - (\pm y + b)| = | \pm (x - y)| = |x - y|.$$

L'ensemble des isométries de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \pm x + b$ avec $b \in \mathbb{R}$.