# CHAPITRE X : CONTINUITÉ

Correction

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x - x_0| \leqslant \eta = \varepsilon$, on a immédiatement

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant |x - x_0| \leqslant \eta = \varepsilon.$$

Par conséquent, la fonction $f$ est continue en tout réel de $\mathbb{R}$ donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in [-M, M]$, on peut écrire

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant k|x - 0| + |f(0)| \leqslant kM + |f(0)|.$$

En choisissant $M$ de telle sorte que $kM + |f(0)| \leqslant M$, ie $M \geqslant \frac{|f(0)|}{1-k}$ (on rappelle que $k < 1$), on peut bien écrire

$$\forall x \in [-M, M], \quad |f(x)| \leqslant M, \quad ie \;\; f(x) \in [-M, M].$$

c) $\diamond$ Existence : La fonction $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue sur $[-M, M]$ en tant que somme de fonctions continues et vérifie

$$g(M) = f(M) - M \leqslant 0 \quad \text{et} \quad g(-M) = f(-M) + M \geqslant 0$$

puisque, pour tout $x \in [-M, M]$, on a $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [-M, M]$ tel que $g(c) = 0$, ie $f(c) = c$. La fonction $f$ admet un point fixe.
$\diamond$ Unicité : Par l'absurde, s'il existe deux points fixes par $f$, notés $c$ et $d$, avec $c \neq d$. On peut alors écrire $f(c) = c$ et $f(d) = d$ puis

$$|c - d| = |f(c) - f(d)| \leqslant k|c - d| \text{ ce qui donne } 1 \leqslant k \text{ puisque } |c - d| \neq 0$$

et qui contredit $k < 1$. Par conséquent, $f$ admet un unique point fixe.