

CHAPITRE X : CONTINUITÉ

Correction

La fonction $h : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(x) - f(x) \end{cases}$ est continue en tant que différence de fonctions continues. Comme elle est définie sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes. En notant α le minimum de h , il existe $c \in [a, b]$ tel que $\alpha = h(c)$. Par hypothèse sur les fonctions f et g , on a

$$\alpha = g(c) - f(c) > 0.$$

Par définition du minimum, pour tout réel x dans $[a, b]$, on a $h(x) \geq \alpha$, ie $g(x) - f(x) \leq \alpha$. Par conséquent

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x) - \alpha.$$