CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

a) On a $f(0) = 0$. Montrons que f est continue à droite et à gauche en 0.
D'une part, pour tout réel $x \in]0,1[$, on a $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $f(x) = \sqrt{x}$. Par conséquent,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à droite en 0.
D'autre part, pour tout réel $x \in]-1,0[$, on a $\lfloor x \rfloor = -1$ donc $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$. Par conséquent,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 + \sqrt{x+1} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à gauche en 0.
La fonction f étant continue à gauche et à droite en 0, elle est continue en 0.

b) Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+n) = n + f(x).$$

Dès lors, la fonction f étant continue en 0 grâce à la question a),

$$\lim_{x \to n} f(x) = \lim_{x \to 0} f(n+x) = \lim_{x \to 0} f(x) + n = f(0) + n = f(n).$$

Donc f est continue en n.

c) Soit $x_0 \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en x_0 car elle est constante sur $]0,1[$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en tout réel donc f est continue en x_0 grâce aux opérations sur les fonctions continues en un point.
Soit $x_1 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On a $x_1 - \lfloor x_1 \rfloor \in]0,1[$ donc f est continue en $x_1 - \lfloor x_1 \rfloor$ d'après ce que nous venons de prouver. Dès lors,

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} f(\lfloor x_1 \rfloor + x) = \lim_{x \to x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} f(x) + \lfloor x_1 \rfloor = f(x_1 - \lfloor x_1 \rfloor) + \lfloor x_1 \rfloor = f(x_1).$$

Donc f est continue en x_1.
Par conséquent, f est continue en tout réel.