CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons $x_n = \dfrac{x}{2^n}$ de telle sorte que $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}$. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $f(x_n) = f(x)$.
⋄ Pour $n = 0$, il n'y a rien à faire.
⋄ Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $f(x_n) = f(x_0)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(\frac{x_n}{2}) \text{ par construction de } x_{n+1}, \\ &= f(2\frac{x_n}{2}) \text{ car } \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(2t) = f(t) \\ &= f(x_n) \\ &= f(x) \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence. Par conséquent, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, on a d'une part

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

D'autre part, on a $x_n = \frac{x_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f est continue en 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0).$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit $f(x) = f(0)$. Autrement dit, f est constante.