CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

a) Remarquons que pour tout réel x non nul, on a $x\sin(1/x) = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Par composition des limites, il s'ensuit

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

b) On écrit

$$\frac{\sin(x\ln x)}{x} = \ln x \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x}.$$

On dispose des deux limites de référence

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Par composition des limites, il s'ensuit

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x} = 1 \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x} = -\infty.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x\ln x)}{x} = -\infty.$$

c) Méthode 1 : On écrit

$$\frac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 5\dfrac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(x)}{x} + 5\frac{\sin(5x)}{5x}}.$$

En utilisant la limite de référence $\dfrac{\sin y}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 5\dfrac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(x)}{x} + 5\frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1-5}{1+5} = -\frac{2}{3}.$$

Méthode 2 : On a

$$\begin{aligned}
\sin(5x) &= Im\left(e^{5ix}\right) = Im\left((e^{ix})^5\right) = Im\left((\cos x + i\sin x)^5\right) \\
&= Im\left(\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (\cos x)^k (i\sin x)^{5-k}\right) \\
&= \binom{5}{4}\cos^4 x\sin x - \binom{5}{2}\cos^2 x\sin^3 x + \binom{5}{0}\sin^5 x \\
&= 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)} &= \frac{\sin x - 5\cos^4 x \sin x + 10\cos^2 x \sin^3 x - \sin^5 x}{\sin x + 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}\\ &= \frac{1 - 5\cos^4 x + 10\cos^2 x \sin^2 x - \sin^4 x}{1 + 5\cos^4 x - 10\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - 5\cos^4 x + 10\cos^2 x \sin^2 x - \sin^4 x}{1 + 5\cos^4 x - 10\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

d) On a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \tan x\frac{1-\cos x}{x^3} = \tan x\frac{2\sin^2(x/2)}{x^3} = \frac{\tan x}{2x}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \frac{1}{2\cos x}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

On dispose de la limite de référence $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$