CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

a) Pour tout réel $x > 0$, on a
$$\frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$
Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$, par comparaison on obtient
$$\lim_{x \to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty.$$

b) Pour tout réel x non nul, on a
$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x - x^2 < x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant x.\end{aligned}$$
En faisant tendre x vers 0 dans cette dernière relation, on obtient grâce au théorème des gendarmes.
$$\lim_{x \to 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$

c) Pour tout réel x non nul, on a
$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$
Ainsi, pour tout $x > 0$, on obtient
$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$
et pour tout $x < 0$, on obtient
$$1 - x > x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1.$$
Dans tous les cas, on peut écrire
$$1 - |x| \leqslant x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1 + |x|.$$
En faisant tendre x vers 0 dans cette dernière relation, on obtient grâce au théorème des gendarmes.
$$\lim_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

d) Pour tout réel $x > 1$, on a $0 \leqslant 1/x < 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$. Par conséquent,
$$\forall x > 1, \quad x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$
Donc
$$\lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$