CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

a) Pour $x \geqslant 0$, on a $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=(x-1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$ donc au voisinage de 4, on a

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{12}.$$

b) Pour $x>0$, on a $\sqrt{x^2+x}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$ donc au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

c) Rappelons que, pour tout entier $n\geqslant 0$, on a

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1)=(a-1)\sum_{k=0}^{n-1}a^k.$$

Dès lors, pour $x\neq 1$, on a

$$\frac{x^{12}-1}{x^{33}-1}=\frac{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{11}x^k}{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{32}x^k}.$$

Il s'ensuit

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{12}-1}{x^{33}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{11}}{1+x+x^2+\cdots+x^{32}}=\frac{12}{33}.$$