CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

a)

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas continue en } 0 &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{f \text{est continue en } 0\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ |x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0 \ \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ |x| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(0)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas bornée au voisinage de } 0 &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{f \text{ est bornée au voisinage de } 0\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\exists \alpha > 0, \quad f \text{ est bornée sur }]-\alpha, \alpha[\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\exists \alpha > 0, \quad \exists M > 0, \quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[: \quad |f(x)| \leqslant M\} \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha > 0, \quad \forall M > 0, \quad \exists x \in]-\alpha, \alpha[: \quad |f(x)| > M. \end{aligned}$$

c)

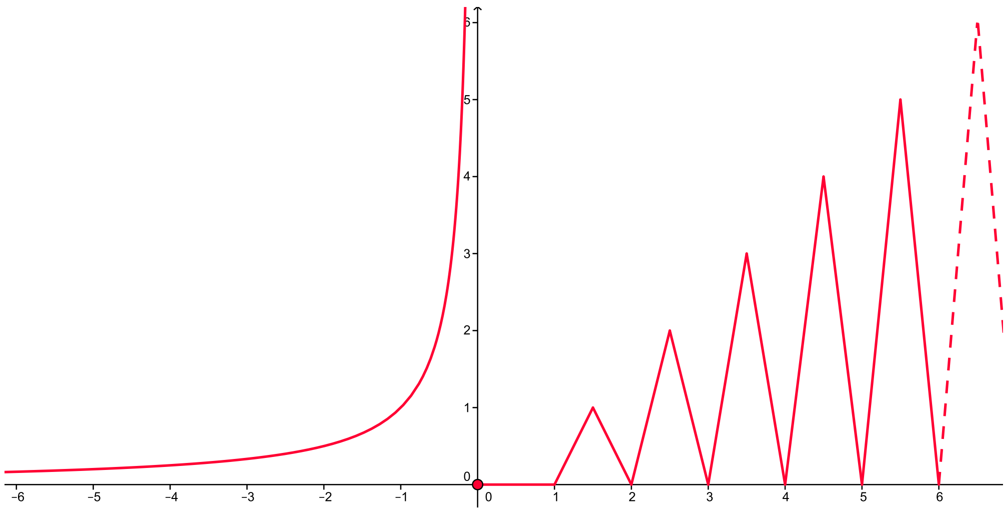
$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas bornée au voisinage de } +\infty &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{f \text{ est bornée au voisinage de } +\infty\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\exists A \in \mathbb{R}, \quad f \text{ est bornée sur } [A, +\infty[\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\exists A \in \mathbb{R}, \quad \exists M > 0, \quad \forall x \in [A, +\infty[: \quad |f(x)| \leqslant M\} \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \forall M > 0, \quad \exists x \in [A, +\infty[: \quad |f(x)| > M. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ en } +\infty &\Leftrightarrow \textit{non}\left\{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right\} \\ &\Leftrightarrow \textit{non}\,\{\forall A \geqslant 0, \quad \exists B \geqslant 0: \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A\} \\ &\Leftrightarrow \exists A \geqslant 0, \quad \forall B \geqslant 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}: \quad x \geqslant B \text{ et } f(x) < A. \end{aligned}$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{|]-\infty,0[}(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{|[n,n+1[}(x) = \begin{cases} 2n(x-n) \text{ si } n \leqslant x < n + 1/2 \\ -2n(x-n-1) \text{ si } n + 1/2 \leqslant x < n+1 \end{cases} .$$



Cette fonction n'est pas continue en 0 cas $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et n'est pas non plus bornée en 0 car $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. La fonction f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$ car pour tout entier $n \geqslant 0$, $f(n+1/2) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Enfin, la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ car, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f(n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.