CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES
Correction

a) L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$(E)\ :\quad r^2-r-1=0$$

dont le discriminant Δ est égal à $\Delta=(-1)^2-4\times(-1)=5$. Par conséquent, l'équation (E) possède deux racines réelles r_1 et r_2 données par

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{et}\qquad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$\phi_n=\lambda_1 r_1^n+\lambda_2 r_2^n.$$

En particulier, pour $n=0$ et $n=1$, on obtient

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=\phi_0\\ \lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2=\phi_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=-\lambda_1\\ \lambda_1(r_1-r_2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=-\lambda_1\\ \lambda_1=\frac{1}{r_1-r_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}.$$

Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n-r_2^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Méthode 1 : Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ la relation $\phi_{n+1}^2-\phi_n\phi_{n+2}=(-1)^n$.

Pour $n=0$, on a $\phi_2=1+0=1$ donc

$$\phi_1^2-\phi_0\phi_2=1^2-0\times 1=1=(-1)^0$$

donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un certain $n\in\mathbb{N}$ fixé. Autrement dit, on suppose que $\phi_{n+1}^2-\phi_n\phi_{n+2}=(-1)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$ fixé. Montrons que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, ie montrons que $\phi_{n+2}^2-\phi_{n+1}\phi_{n+3}=(-1)^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned}\phi_{n+2}^2-\phi_{n+1}\phi_{n+3}&=\phi_{n+2}(\phi_{n+1}+\phi_n)-\phi_{n+1}(\phi_{n+2}+\phi_{n+1})\text{ par construction de }(\phi_n),\\&=\phi_{n+2}\phi_n-\phi_{n+1}^2\text{ en développant,}\\&=-(-1)^n\text{ par hypothèse de récurrence,}\\&=(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est ainsi vérifiée.

Nous avons montré par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\phi_{n+1}^2-\phi_n\phi_{n+2}=(-1)^n.$$

Méthode 2 : En utilisant la forme explicite de (ϕ_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} &= \frac{1}{5}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})^2 - \frac{1}{5}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})(r_1^n - r_2^n) \\
&= \frac{1}{5}\left[r_1^{2(n+1)} - 2r_1^{n+1}r_2^{n+1} + r_2^{2(n+1)} - r_1^{2n+2} + r_1^{n+2}r_2^n + r_2^{n+2}r_1^n - r_2^{2n+2}\right] \\
&= \frac{1}{5}r_1^n r_2^n(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{5}(r_1r_2)^n(r_1 - r_2)^2.
\end{aligned}$$

Or, on a $r_1r_2 = \frac{1^2-(\sqrt{5})^2}{4} = -1$ et $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$ donc

$$\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} = (-1)^n.$$

c) En utilisant l'expression de ϕ_n obtenue lors de la question précédente, on peut écrire

$$\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1^n - r_2^n} = \frac{r_1^{n+1}}{r_1^n}\frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n} = r_1\frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}.$$

Or $|r_2| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ et $|r_1| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$ de quoi l'on déduit $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} = 0$. Il s'ensuit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \lim_{n\to+\infty} r_1\frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n} = r_1.$$

d) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a établi $\phi_k = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^k - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^k$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\phi_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r_1^k - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}r_1^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}r_2^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(1+r_1)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(1+r_2)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^2)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(r_2^2)^n \text{ car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont les solutions de } r^2 - r - 1 = 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{2n} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{2n} \\
&= \phi_{2n}
\end{aligned}$$

D'autre part, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}\phi_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r_1^k - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^k\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-r_1)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-r_2)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(1-r_1)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-r_2)^n \text{ grâce à la formule du binôme} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^n - \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^n \text{ car } 1 - r_1 = r_2 \text{ et } 1 - r_2 = r_1 \\
&= -\phi_n.
\end{aligned}$$