CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES

Correction

a) On a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite (H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Dès lors soit (H_n) converge, soit (H_n) tend vers l'infini. Si (H_n) converge, notons ℓ sa limite. Alors (H_{2n}) converge également vers ℓ en tant que sous-suite d'une suite convergente, puis $(H_{2n} - H_n)$ converge. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on obtient

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{n \to +\infty} H_{2n} - H_n = \ell - \ell = 0.$$

Ceci est absurde donc (H_n) tend vers l'infini.

b) On montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

• Tout d'abord,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Une étude de fonction montre que pour $0 < x < 1$, on a $x + \ln(1-x) < 0$. Donc (u_n) est décroissante.

• On étudie ensuite la monotonie de (v_n). On a

$$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Une étude de fonction montre que pour $0 < x < 1$, on a $x - \ln(1+x) > 0$. Donc (v_n) est croissante.

• On a

$$u_n - v_n = H_n - \ln(n) - H_n + ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \ln 1 = 0.$$

• Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En tant que telles, elles convergent vers une même limite.