CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES
Correction

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est

$$r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1$ vaut $(2\cos\theta)^2 - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2 < 0$ car $\theta \in]0, \pi[$. L'équation caractéristique admet deux racines non réelles conjuguées

$$\frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = e^{-i\theta}.$$

Méthode 1 : Il existe ainsi deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta).$$

On exploite les conditions $u_0 = u_1 = 1$ pour obtenir le système

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 \cos(\theta) + \lambda_2 \sin(\theta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases}.$$

Dès lors,

$$u_n = \cos(n\theta) + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin(n\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(n\theta) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(n\theta)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Méthode 2 : En résolvant ce problème sur les complexes, il existe deux complexes α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(e^{i\theta})^n + \beta(e^{-i\theta})^n.$$

On exploite les conditions $u_0 = u_1 = 1$ pour obtenir le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 1 - e^{-i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1 - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sin\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ \beta = \dfrac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sin\theta} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sin(\theta/2)}{\sin\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{in\theta} + \frac{\sin(\theta/2)}{\sin\theta} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-in\theta} = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin\theta} \left(e^{i(n-1/2)\theta} + e^{-i(n-1/2)\theta} \right) \\ &= 2\frac{\sin(\theta/2)\cos\left((n-\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\cos\left((n-\frac{1}{2})\theta\right)}{\cos(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Conclusion : Dans les deux méthodes, on obtient ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\cos\left((n-\frac{1}{2})\theta\right)}{\cos(\theta/2)}.$$