CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES
Correction

Posons $z_n = x_n + iy_n$. En utilisant les relations de récurrence définissant (x_n) et (y_n), on obtient, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} + i\frac{x_n + y_n}{2}$$

donc

$$|z_{n+1}|^2 = \left(\frac{x_n - y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 = \frac{x_n^2 + y_n^2}{2} = \frac{|z_n|^2}{2}.$$

Dès lors, la suite réelle $(|z_n|)$ est une suite géométrique vérifiant $|z_{n+1}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|z_n|$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |z_0|.$$

Par ailleurs $1/\sqrt{2} < 1$ donc la suite $\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ converge vers 0. Par conséquent, la suite $(|z_n|)$ converge vers 0 puis la suite (z_n) converge vers 0. Il s'ensuit que les suites $(\mathrm{Re}\ (z_n)) = (x_n)$ et $(\mathrm{Im}\ (z_n)) = (y_n)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(0)$ et $\mathrm{Im}(0)$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$