CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES

Correction

Montrons tout d'abord que (a_n) est croissante. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ donc } a_{n+1} > a_n.$$

La suite (a_n) est croissante.
Montrons ensuite que (b_n) est décroissante. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0 \text{ donc } b_{n+1} < b_n. \end{aligned}$$

La suite (b_n) est décroissante.
Enfin, on a

$$b_n - a_n = \frac{1}{n.n!} \to 0.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite[1] que nous noterons ℓ.

[1] On peut montrer que cette limite est égale à $e - 1$.