CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES

Correction

a) Soit $n \geqslant 2$. On a $|\sin n| \leqslant 1$ et $n + (-1)^n \geqslant n - 1$. Dès lors, on obtient

$$0 \leqslant |u_n| = \left|\frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ donc grâce au théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0 \text{ puis } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a

$$v_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times ... \times n}{n \times n \times ... \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times ... \times \frac{n}{n}.$$

Or, pour tout entier $k \in [\![2, n]\!]$, on peut écrire $\frac{k}{n} \leqslant 1$ d'où

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

En utilisant le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

c) Pour tout entier n, on a $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$. La fonction racine n-ième étant croissante ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln x}{n}}$), on obtient l'encadrement

$$1 = \sqrt[n]{1} \leqslant w_n \leqslant \sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 3}{n}}.$$

Par ailleurs, $\frac{\ln 3}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{\ln 3}{n}} \to e^0 = 1$. Grâce au théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = 1.$$

d) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Dès lors,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$