CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES

Correction

Comme $u_0 \geqslant 0$, la relation de récurrence définissant (u_n) assure que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant continue sur $[-1, +\infty[$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, il vient

$$\ell = \sqrt{1+\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 1+\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La suite (u_n) étant positive, son éventuelle limite ℓ est également positive donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ et $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - \ell| = |\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\ell}| &= \left| \frac{(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\ell})(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell})}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell}} \right| = \left| \frac{u_n - \ell}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell}} \right| \\ &= \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell}} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{1+\ell}} \qquad \text{car } \sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell} \geqslant \sqrt{1+\ell} > 0.\end{aligned}$$

On peut également obtenir cette inégalité par application de l'inégalité des accroissements finis.

c) On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^n |u_0 - \ell|.$$

◇ Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \ell| = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^0 |u_0 - \ell|$.

◇ On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^n |u_0 - \ell|$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - \ell| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\ell}} |u_n - \ell| \quad \text{grâce à la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^n |u_0 - \ell| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^{n+1} |u_0 - \ell| \quad \text{ce qui achève la récurrence.}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} = \frac{1}{\ell} \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell}} \right)^n = 0$. Par encadrement, il s'ensuit $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, ie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.