CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES
Correction

a) On a

$$u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{1 - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}.$$

Or $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Il s'ensuit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

b) En multipliant par la quantité conjuguée, on peut réécrire

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{(n^2+n+1) - (n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1-0+0}} = 1.$$

c) On sait que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc

$$w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}.$$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$