CHAPITRE VIII : SUITES NUMÉRIQUES
Correction

Toute suite stationnaire est convergente. Réciproquement, soit (u_n) une suite convergente d'entiers naturels. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Dès lors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1/3$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait $|u_n - \ell| < 1/3$. Dès lors, pour tous les entiers m et n tels que $m, n \geqslant n_1$, on a

$$|u_m - u_n| = |u_m - \ell - (u_n - \ell)| \leqslant |u_m - \ell| + |u_n - \ell| \leqslant 1/3 + 1/3 = 2/3 < 1.$$

La suite (u_n) étant composée d'entiers, on a soit $|u_n - u_m| = 0$, soit $|u_m - u_n| \geqslant 1$. L'inégalité précédente montre que, pour tous les entiers m et n tels que $m, n \geqslant n_1$, $u_m = u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est stationnaire.