

CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} \Leftrightarrow (n+1) \binom{2n+1}{n+1} = (2n+1) \binom{2n}{n}.$$

Ainsi $n+1$ divise $(2n+1) \binom{2n}{n}$. Par ailleurs, en écrivant $2(n+1) - (2n+1) = 1$, le théorème de Bézout assure que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. Par conséquent, on a

$$n+1 \mid (2n+1) \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad (n+1) \wedge (2n+1) = 1$$

donc $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$ d'après le lemme de Gauss.