CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE
Correction

a) Grâce à la formule du binôme de Newton, on peut écrire :

$$\begin{aligned} N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k &= \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j+1 \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (\sqrt{2})^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (\sqrt{2})^{2j+1} \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} 2^j}_{\in\mathbb{N}} + \sqrt{2} \underbrace{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} 2^j}_{\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

En posant $a_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} 2^j$ et $b_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} 2^j$, qui sont deux entiers naturels en tant que somme et produit d'entiers naturels, on a bien $N = a_n + b_n\sqrt{2}$.

b) De la même manière, on peut écrire

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k &= \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k - \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j+1 \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} 2^j - \sqrt{2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} 2^j = a_n - \sqrt{2} b_n. \end{aligned}$$

On a alors d'une part $(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = [(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})]^n = (1-2)^n = (-1)^n$ et d'autre part

$$(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (a_n + \sqrt{2}b_n)(a_n - \sqrt{2}b_n) = a_n^2 - 2b_n^2.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n a_n^2 - 2(-1)^n b_n^2 = 1.$$

Grâce au théorème de Bézout, les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux (avec $u = (-1)^n a_n$ et $v = -2(-1)^n b_n$, on a $a_n u + b_n v = 1$).