

CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE

Correction

Notons r le reste de la division euclidienne de $a - 1$ par b . Autrement dit, $a - 1 = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Dès lors,

$$ab^n - 1 = (bq + r + 1)b^n - 1 = qb^{n+1} + (r + 1)b^n - 1$$

Comme $r < b$, on a $r + 1 \leq b$ d'où $(r + 1)b^n - 1 \leq bb^n - 1 = b^{n+1} - 1$ puis $(r + 1)b^n - 1 < b^{n+1}$. De plus, comme $r \geq 0$, on a $(r + 1)b^n - 1 \geq b^n - 1 \geq 0$ car $b \neq 0$. Par conséquent,

$$ab^n - 1 = qb^{n+1} + (r + 1)b^n - 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq (r + 1)b^n - 1 < b^{n+1}.$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} sont respectivement q et $(r + 1)b^n - 1$.