CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE

Correction

Méthode 1 : Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.
Pour $n = 0$, on a $2^{6n+3} + 3^{2n+1} = 2^3 + 3 = 11$ qui est bien divisible par 11.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$. Par conséquent, il existe un entier k tel que $11k = 2^{6n+3} + 3^{2n+1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 2^{6(n+1)+3} + 3^{2(n+1)+1} &= 2^6 \times 2^{6n+3} + 3^2 \times 3^{2n+1} = 2^6(11k - 3^{2n+1}) + 3^2 \times 3^{2n+1} \\ &= 11 \times 2^6 k + (9 - 2^6)3^{2n+1} = 11 \times 2^6 k - 55 \times 3^{2n+1} \\ &= 11 \times (2^6 k - 5 \times 3^{2n+1}). \end{aligned}$$

Donc $2^{6(n+1)+3} + 3^{2(n+1)+1}$ est divisible par 11 et ceci achève la récurrence.
Méthode 2 : On a $2^{6n+3} = (2^3)^{2n+1} = 8^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[11]$ car $8 \equiv -3[11]$ et $2n+1$ est impair. Dès lors

$$2^{6n+3} + 3^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0[11]$$

ie 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.
Méthode 3 : On a $2^6 = 64 \equiv 9[11]$ donc $2^{6n} \equiv 9^n[11]$ ce qui donne

$$2^{6n+3} + 3^{2n+1} = 2^{6n} \times 8 + 9^n \times 3 \equiv 9^n \times 8 + 3 \times 9^n \equiv 11 \times 9^n \equiv 0[11]$$

ie 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.