

CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE

Correction

a) Avec $x = 1$, on $x - 1 = 0 \nmid 4 = x + 3$. Par conséquent, nous pouvons supposer $x \neq 1$. On a

$$x - 1 \mid x + 3 \Leftrightarrow \frac{x + 3}{x - 1} = 1 + \frac{4}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 1 \mid 4 \Leftrightarrow x - 1 \in \mathcal{D}(4).$$

Or $\mathcal{D}(4) = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$. Par conséquent l'ensemble des solutions dans \mathbb{N} de $x - 1 \mid x + 3$ est l'ensemble

$$\{-3, -1, 0, 2, 3, 5\} \cap \mathbb{N} = \{0, 2, 3, 5\}.$$

b) Avec $x = -2$, on $x + 2 = 0 \nmid 6 = x^2 + 2$. Par conséquent, nous pouvons supposer $x \neq -2$. On a

$$x + 2 \mid x^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2) + 6}{x + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 2 + \frac{6}{x + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{x + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 2 \mid 6.$$

Or $\mathcal{D}(6) = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions dans \mathbb{N} de $x + 2 \mid x^2 + 2$ est l'ensemble

$$\{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\} \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 4\}.$$