# **CHAPITRE VI :** ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction

a) La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt$ est une primitive de la fonction considérer. Pour $x>0$ fixé, on calcule cette intégrale en faisant le changement de variable $t=\frac{1}{u}$ pour lequel $\frac{dt}{t^2}=-du$. Ainsi, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}du = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du = \left[\sqrt{1+u^2}\right]_{\frac{1}{x}}^1 = \sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est une autre primitive de la fonction considérée.

b) On note $n$ le degré d'une éventuelle solution polynômiale $P$ et $a_n \neq 0$ son coefficient dominant. Le terme devant $x^n$ dans $(1+x^2)P''(x)+xP'(x)-P(x)$ est

$$n(n-1)a_n + na_n - a_n = (n^2-1)a_n.$$

Ce terme devant être nul, il vient $n=1$. On recherche ainsi une solution de la forme $P : x \mapsto ax+b$. Or, on a

$$P \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)P''(x)+xP'(x)-P(x)=0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ax-(ax+b)=0 \Leftrightarrow b=0.$$

La fonction $P : x \mapsto x$ est une solution de $(E)$.

c) Sur $]0,+\infty[$, n'importe quelle fonction $y$ deux fois dérivable peut s'écrire sous la forme $y(x)=x\lambda(x)$ avec $\lambda$ deux fois dérivable. Il suffit de poser $\lambda(x)=\frac{y(x)}{x}$.
Soit $f : x \mapsto \lambda(x)x$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable à déterminer. On a

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ f'(x)=\lambda'(x)x+\lambda(x) \quad \text{et } f''(x)=\lambda''(x)x+2\lambda'(x).$$

Dès lors, la fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\forall x \in ]0,+\infty[,\quad (1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0\\
\Leftrightarrow&\forall x \in ]0,+\infty[,\quad (1+x^2)(\lambda''(x)x+2\lambda'(x))+x(\lambda'(x)x+\lambda(x))-\lambda(x)x=0\\
\Leftrightarrow&\forall x \in ]0,+\infty[,\quad x(1+x^2)\lambda''(x)+(2+3x^2)\lambda'(x)=0\\
\Leftrightarrow&\lambda' \text{ est solution sur } ]0,+\infty[ \text{ de } Y'+\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)}Y=0.
\end{aligned}$$

Or, en écrivant

$$\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)} = \frac{3(x^2+1)-1}{x(1+x^2)} = \frac{3}{x}-\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{3}{x}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x} = \frac{2}{x}+\frac{x}{1+x^2},$$

on peut écrire : la fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\exists \alpha \in \mathbb{R},\quad \forall x \in ]0,+\infty[,\quad \lambda'(x)=\alpha e^{-\left(2\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)} = \frac{\alpha}{x^2\sqrt{1+x^2}}\\
\Leftrightarrow&\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in ]0,+\infty[,\quad \lambda(x)=-\alpha\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\beta \text{ grâce à la première question,}\\
\Leftrightarrow&\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in ]0,+\infty[,\quad f(x)=x\lambda(x)=a\sqrt{1+x^2}+bx \quad (a=-\alpha \text{ décrit } \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de $(E)$ est l'ensemble[1] des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de la forme

$$x \mapsto a\sqrt{1+x^2}+bx \quad \text{avec} \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

[1]On peut montrer que cet ensemble est également l'ensemble des solutions de $(E)$ définies sur $\mathbb{R}$.