CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Correction

La fonction q est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + \frac{1}{RC}y = \frac{U}{R} \quad (E).$$

- Les solutions de l'équation homogène $y' + \frac{1}{RC}y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{RC}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction constante égale à CU est clairement solution de (E).
- Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{RC}t} + CU$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction q vérifie $q(0) = 0$, autrement dit, cette fonction q est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{1}{RC}y = \frac{U}{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Ainsi, on sait qu'il existe un réel λ tel que, à tout instant t, on ait $q(t) = \lambda e^{-t/RC} + CU$. Par ailleurs, la condition $q(0) = 0$ donne $\lambda + CU = 0$, ie $\lambda = -CU$. Par conséquent, à tout instant t, la charge du condensateur est donnée par

$$q(t) = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

La fonction q est strictement croissante et on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = CU$.

t	0		$T_{1/2}$		$+\infty$
$q(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{CU}{2}$	$\nearrow$	CU

La charge complète du condensateur est égale à CU donc on recherche la valeur de l'instant $T_{1/2}$ au bout duquel la charge du condensateur est égale à $CU/2$. On a

$$\begin{aligned} q(T_{1/2}) = \frac{CU}{2} &\Leftrightarrow CU\left(1 - e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}}\right) = \frac{CU}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{T_{1/2}}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T_{1/2} = RC\ln 2. \end{aligned}$$

Le condensateur est à moitié chargé au bout d'un temps égal à $RC\ln 2$ (exprimé en USI).