CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Correction

L'accroissement de la population étant proportionnel à la population, on déduit qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad P'(t) = kP(t).$$
Ainsi, la fonction P vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre et homogène $y' - ky = 0$. Par conséquent, il existe un réel λ (que l'on peut légitimement supposer non nul) tel que, à tout instant t, on ait
$$P(t) = \lambda e^{kt}.$$
On traduit la phrase affirmant que la population double tous les 50 ans par
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad P(t + 50) = 2P(t).$$
En utilisant l'expression explicite de P que l'on vient de déterminer, on obtient
$$P(t + 50) = 2P(t) \Leftrightarrow \lambda e^{k(t+50)} = 2\lambda e^{kt} \Leftrightarrow e^{50k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{50}.$$
Nous cherchons le temps T pour lequel on ait, à tout instant t, la relation $P(t + T) = 3P(t)$. On peut écrire
$$P(t + T) = 3P(t) \Leftrightarrow \lambda e^{k(t+T)} = 3\lambda e^{kt} \Leftrightarrow e^{kT} = 3 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 3}{k} = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \approx 79,25.$$
Autrement dit, la population triple tous les 79 ans et 3 mois environ.