CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction

Il s'agit de trois équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

a) On note (E) l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
  L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$ possède deux racines simples 1 et 2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Étape 2 : On recherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto \mu e^{3x}$. En effet, le réel 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On obtient

$$\begin{aligned} f_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_p''(x) - 3f_p'(x) + 2f_p(x) = 2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 9\mu e^{3x} - 9\mu e^{3x} + 2\mu e^{3x} = 2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow 2\mu = 2 \Leftrightarrow \mu = 1. \end{aligned}$$

  La fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{3x}$ est une solution de (E).
- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x + e^{3x} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

b) On note (E) l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
  L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$ possède deux racines simples 1 et 2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Étape 2 : On recherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto \mu x e^{2x}$. En effet, le réel 2 est une racine simple de l'équation caractéristique. Pour tout réel x, on a

$$f_p'(x) = \mu(1+2x)e^{2x} \quad \text{et} \quad f_p''(x) = \mu(4+4x)e^{2x}.$$

  On obtient

$$\begin{aligned} f_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_p''(x) - 3f_p'(x) + 2f_p(x) = 3e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mu(4+4x)e^{2x} - 3\mu(1+2x)e^{2x} + 2\mu x e^{2x} = 3e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mu e^{2x} = 3e^{2x} \Leftrightarrow \mu = 3. \end{aligned}$$

  La fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 3xe^{2x}$ est une solution de (E).
- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x + 3xe^{2x} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

c) On note (E) l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
  L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$ possède deux racines simples 1 et 2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Étape 2 : On recherche d'une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On obtient

$$\begin{aligned} f_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2b-6a)x + 2a - 3b + 2c = 8x^2 - 24x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 8 = 0 \\ 2b - 6a + 24 = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}. \end{aligned}$$

  La fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4x^2 - 4$ est une solution de (E).
- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x + 4x^2 - 4 \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par ailleurs, pour une telle fonction, les conditions $y(0) = y'(0) = 0$ donnent

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}.$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$ est l'unique solution du problème de Cauchy considéré.