CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction

a) On note (E) l'équation différentielle $y' - 2y = \cos x + 2\sin x$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y' - 2y = 0$.
  Une primitive de $x \mapsto -2$ est la fonction $x \mapsto -2x$ donc l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme
  $$x \mapsto \lambda e^{2x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière.
  Méthode 1 : On recherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto a\cos x + b\sin x$ où a et b sont deux réels à déterminer. On a
  $$\begin{aligned}
  & f_p \text{ est solution de } (E) \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) - 2f_p(x) = \cos x + 2\sin x \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ -a\sin x + b\cos x - 2(a\cos x + b\sin x) = \cos x + 2\sin x \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (b-2a)\cos x - (a+2b)\sin x = \cos x + 2\sin x \\
  \Leftrightarrow & \begin{cases} b - 2a = 1 \\ -a - 2b = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -5a = 4 \\ b = 1 + 2a - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{3}{5} \end{cases} \quad .
  \end{aligned}$$
  Ainsi, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_p(x) = -\frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x$ est une solution de (E).
  Méthode 2 : On applique la méthode de variation de la constante. On recherche une solution de (E) de la forme $f_p : x \mapsto \lambda(x)e^{2x}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a
  $$\begin{aligned}
  & f_p \text{ est solution de } (E) \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) - 2f_p(x) = \cos x + 2\sin x \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{2x} + 2\lambda(x)e^{2x} - 2\lambda(x)e^{2x} = \cos x + 2\sin x \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = (\cos x + 2\sin x)e^{-2x} = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + 2\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)e^{-2x} \\
  \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \left(\frac{1}{2} - i\right)e^{(i-2)x} + \left(\frac{1}{2} + i\right)e^{-(i+2)x}.
  \end{aligned}$$
  Il suffit alors de choisir
  $$\begin{aligned}
  \lambda(x) &= \frac{\frac{1}{2} - i}{-2 + i}e^{(i-2)x} + \frac{\frac{1}{2} + i}{-2 - i}e^{-(i+2)x} \\
  &= \frac{\left(\frac{1}{2} - i\right)(-2 - i)}{|-2 + i|^2}e^{(i-2)x} + \frac{\left(\frac{1}{2} + i\right)(-2 + i)}{|-2 - i|^2}e^{-(i+2)x} \\
  &= \frac{-2 + \frac{3}{2}i}{5}e^{(i-2)x} + \frac{-2 - \frac{3}{2}i}{5}e^{-(i+2)x} = -\frac{4}{5}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}e^{-2x} - \frac{3}{5}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}e^{-2x} \\
  &= -\left(\frac{4}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)e^{-2x}.
  \end{aligned}$$
  Ainsi, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_p(x) = -\left(\frac{4}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)e^{-2x}e^{2x} = -\frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x$ est une solution de (E).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) On note (F) l'équation différentielle $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $(F_0) : y' + \tan(t)y = 0$.
Une primitive définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $t \mapsto \tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ (de la forme U'/U) est la fonction $t \mapsto -\ln(|\cos t|) = -\ln(\cos t)$ car cos est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (F_0) est l'ensemble des fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{\ln(\cos t)} = \lambda \cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On recherche une solution f_p de (F) définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la forme $f_p : t \mapsto \lambda(t)\cos t$ où $\lambda : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a

$$\begin{aligned}
& f_p \text{ est solution de } (F) \\
\Leftrightarrow & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f_p'(t) + \tan(t) f_p(t) = \sin(2t) \\
\Leftrightarrow & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \lambda'(t)\cos t - \lambda(t)\sin t + \lambda(t) \underbrace{\cos t \tan t}_{=\cos t \frac{\sin t}{\cos t} = \sin t} = \sin(2t) \\
\Leftrightarrow & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \lambda'(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos t} = \frac{2\sin t \cos t}{\cos t} = 2\sin t.
\end{aligned}$$

Le choix $\lambda(t) = -2\cos t$ convient donc la fonction f_p définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f_p(t) = -2\cos t \cos t$ est une solution de (F).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la forme

$$t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) On note (E) l'équation différentielle $(x \ln x)y' - y = -\frac{1+\ln x}{x}$ (E).

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$(x \ln x)y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x \ln x} y = 0 \quad (E_0).$$

Une primitive de la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $x \mapsto -\frac{1}{x \ln x} = -\frac{1/x}{\ln x}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(|\ln x|) = -\ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$. Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $]1, +\infty[$ de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-(-\ln(\ln x))} = \lambda e^{\ln(\ln x)} = \lambda \ln(x) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière en appliquant la méthode de variation de la constante. On recherche une solution f_p de (E) définie sur $]1, +\infty[$ de la forme $f_p : x \mapsto \lambda(x)\ln x$

où $\lambda :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a

$$\begin{aligned}
f_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, \quad (x \ln x) f_p'(x) - f_p(x) = -\frac{1 + \ln x}{x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, \quad (x \ln x) \left[\lambda'(x) \ln x + \frac{\lambda(x)}{x} \right] - \lambda(x) \ln x = -\frac{1 + \ln x}{x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, \quad x (\ln x)^2 \lambda'(x) = -\frac{1 + \ln x}{x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, \quad \lambda'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} = -\frac{(x \ln x)'}{(x \ln x)^2}.
\end{aligned}$$

Le choix $\lambda(x) = \frac{1}{x \ln x}$ convient donc $x \mapsto \frac{1}{x \ln x} \ln x = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E).

- Étape 3 : Conclusion
  L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $]1, +\infty[$ de la forme

$$x \mapsto \lambda \ln x + \frac{1}{x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$