CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction

a) On note (E) l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène (E_0) $y' + 2y = 0$.
Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2$ est $x \mapsto 2x$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme
$$x \mapsto \lambda e^{-2x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On considère une fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-2x}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a
$$\begin{aligned} f_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) + 2f_p(x) = e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x} + 2\lambda(x)e^{-2x} = e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1. \end{aligned}$$
Le choix $\lambda(x) = x$ convient. Ainsi, la fonction $f_p : x \mapsto xe^{-2x}$ est une solution de (E).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme
$$x \mapsto (\lambda + x)e^{-2x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) On note (F) l'équation différentielle $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène (F_0) $y' - 2y = 0$.
Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2$ est $x \mapsto -2x$ donc les solutions de (F_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme
$$x \mapsto \lambda e^{-(-2x)} = \lambda e^{2x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On considère une fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_p : x \mapsto \lambda(x)e^{2x}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a
$$\begin{aligned} f_p \text{ est solution de } (F) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) - 2f_p(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{2x} + 2\lambda(x)e^{2x} - 2\lambda(x)e^{2x} = -\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \quad \left(\text{de la forme } \frac{U'}{U}\right). \end{aligned}$$
Le choix $\lambda(x) = \ln(1+e^{-2x})$ convient. Ainsi, la fonction $f_p : x \mapsto e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$ est une solution de (F).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme
$$x \mapsto \left(\lambda + \ln(1+e^{-2x})\right)e^{2x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$