CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction

a) Il faut montrer que, pour tout réel x, on a $x+\sqrt{x^2+1}>0$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $x^2+1>x^2$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, il vient

$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geqslant -x \quad \text{donc } \sqrt{x^2+1}+x>0.$$

Par conséquent, la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$g'(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) On note (E) l'équation différentielle $y'+\frac{x}{x^2+1}y=\frac{1}{1+x^2}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène (E_0) $y'+\frac{x}{x^2+1}y=0$.
  Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto\frac{x}{x^2+1}$ est $x\mapsto\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln(\sqrt{x^2+1})$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x\mapsto\lambda e^{-\ln(\sqrt{x^2+1})}=\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante.
  On considère une fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_p : x\mapsto\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ où $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a

$$\begin{aligned}
&f_p \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\ f_p'(x)+\frac{x}{x^2+1}f_p(x)=\frac{1}{1+x^2}\\
\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\lambda(x)}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{1+x^2}\\
\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x\lambda(x)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{x^2+1}\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{1+x^2}\\
\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

  En utilisant le calcul de g' effectué lors de la question précédente, on remarque que le choix $\lambda(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ convient. Ainsi, la fonction $f_p : x\mapsto\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$ est une solution de (E).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x\mapsto\frac{\lambda+\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dès lors, si f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\lambda + \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$$

La condition $f(0) = 1$ se réécrit alors

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda + \ln(1)}{1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Par conséquent, l'unique solution au problème de Cauchy considéré est la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1 + \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}.$$

c) On note (F) l'équation différentielle $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{1+x^2}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène (F_0) $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$.
  Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ est $x \mapsto \ln(x^2+1)$ donc les solutions de (F_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante.
  On considère une fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^2+1}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a

$$\begin{aligned} & f_p \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) + \frac{2x}{x^2+1} f_p(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)(x^2+1) - 2x\lambda(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{x^2+1}\frac{\lambda(x)}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{x^2+1} - \frac{2x\lambda(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{2x\lambda(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1. \end{aligned}$$

  Le choix $\lambda(x) = x$ convient. Ainsi, la fonction $f_p : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une solution de (F).
- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda + x}{x^2+1} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dès lors, si h est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{\lambda + x}{x^2+1}.$$

La condition $h(0) = 1$ se réécrit alors

$$h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 0}{1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Par conséquent, l'unique solution au problème de Cauchy considéré est la fonction

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1} \end{cases} .$$