CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Correction

On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)e^{-x} \end{cases}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = (f'(x) - f(x))e^{-x} \leqslant 0.$$

La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f(x)e^{-x} = g(x) \leqslant g(0) = f(0) = 0$$

ce qui donne $f(x) \leqslant 0$. La fonction f étant à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a également $f(x) \geqslant 0$ ce qui, par double inégalité, donne $f(x) = 0$. La fonction f est la fonction nulle.