CHAPITRE VI : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Correction

On commence par résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' + \frac{x^2+1}{x}y = 1$ (E).

- Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $y' + \frac{x^2+1}{x}y = 0$ (E_0).
Une primitive de $x \mapsto \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln x$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de la forme
$$x \mapsto \lambda e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)} = \frac{\lambda}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On recherche une solution f_p de (E) définie sur $]0,+\infty[$ de la forme $f_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $\lambda :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. On a
$$\begin{aligned}
&f_p \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow &\forall x > 0,\ f_p'(x) + \frac{x^2+1}{x}f_p(x) = 1\\
\Leftrightarrow &\forall x > 0,\ \lambda'(x)\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda(x)\left[-\frac{1}{x^2}e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right] + \frac{x^2+1}{x}\lambda(x)\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1\\
\Leftrightarrow &\forall x > 0,\ \lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \quad (\text{ de la forme } U'e^U).
\end{aligned}$$
Le choix $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ convient donc $f_p : x \to \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{x}$ est une solution de (E).

- Étape 3 : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de la forme
$$x \mapsto \frac{\lambda}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On retourne au problème de Cauchy $(\mathcal{C})$: $\begin{cases} y' + \frac{x^2+1}{x}y = 1 \\ y(\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. On a

$$f \text{ est soluton de } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est solution de } (E) \\ f(\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x > 0\ f(x) = \frac{1+\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \\ f(\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x > 0\ f(x) = \frac{1+\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \\ 1 + \frac{\lambda}{e} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x > 0\ f(x) = \frac{1+\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \\ \lambda = -e \end{cases}.$$

Par conséquent, l'unique solution au problème de Cauchy $\mathcal{C}$ est la fonction
$$\begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1 - e^{1-\frac{x^2}{2}}}{x} \end{cases}.$$