CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS
Correction

a) Soit $y \in f(\overline{A})$. On montre que $y \in \overline{f(A)}$ par l'absurde. Supposons $y \notin \overline{f(A)}$, ie $y \in f(A)$.
D'une part, on a $y \in f(\overline{A})$ donc
$$\exists x_1 \in \overline{A},\ y = f(x_1).$$
D'autre part, on a $y \in f(A)$ donc
$$\exists x_2 \in A,\ y = f(x_2).$$
On a ainsi $f(x_1) = y = f(x_2)$ et comme f est supposée injective, il vient $x_1 = x_2$ ce qui est absurde car $x_2 \in A$ et $x_1 \in \overline{A}$, ie $x_1 \notin A$. Par conséquent, on a bien $y \in \overline{f(A)}$.
Il s'ensuit $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

b) Soit $y \in \overline{f(A)}$. La fonction f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, on a alors $y = f(x) \in f(A)$ ce qui contredit $y \in \overline{f(A)}$ donc $x \notin A$, ie $x \in \overline{A}$. On a ainsi $y = f(x)$ avec $x \in \overline{A}$ donc $y \in f(\overline{A})$.
Il s'ensuit $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

c) On procède par double implication.
• Si f est bijective. Soit $A \subset E$. La fonction f est injective et surjective donc, d'après les questions précédentes, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Par double inclusion, il vient $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
Ainsi, si f est bijective, pour toute partie $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
• On suppose que, pour toute partie A de E, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(i) On montre que f est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
On pose $A = \{x_1\} \subset E$. On a $f(x_2) = f(x_1) \in f(A)$. Par l'absurde, si $x_2 \notin A$ alors $x_2 \in \overline{A}$ donc $f(x_2) \subset f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, ie $f(x_2) \notin f(A)$ ce qui contredit $f(x_2) \in f(A)$. On en déduit que $x_2 \in A = \{x_1\}$, autrement dit $x_2 = x_1$.
La fonction f se retrouve être injective.

(ii) On montre que f est surjective en prouvant $f(E) = F$. On a déjà $f(E) \subset F$. De plus, en posant $A = E$, on a $\overline{A} = \emptyset$ et
$$\overline{f(E)} = \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset.$$
Par passage au complémentaire, il vient $F \subset f(E)$ puis $f(E) = F$ par double inclusion.
La fonction f se retrouve être surjective.

Ainsi, si pour toute partie A de E, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, alors la fonction f est injective et surjective donc bijective.
• On a prouvé que la fonction f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. L'équivalence demandée est établie.