CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
Correction

On détermine les primitives suivantes au moyen d'une intégration par parties.

a) L'application $f : t \mapsto t \ln t$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ donc

$$\begin{cases}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_1^x t \ln t dt \end{cases}$$

est une primitive de f. Soit $x \in]0, +\infty[$, en posant $\begin{cases} U' = t \\ V = \ln t \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} U = \frac{1}{2}t^2 \\ V' = \frac{1}{t} \end{cases}$, on obtient

$$\int_1^x t \ln t dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de f.

b) L'application $g : t \mapsto t \arctan t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x t \arctan t dt \end{cases}$$

est une primitive de g. Soit $x \in \mathbb{R}$, en posant $\begin{cases} U' = t \\ V = \arctan(t) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} U = \frac{1}{2}t^2 \\ V' = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x t \arctan(t) dt &= \left[\frac{t^2 \arctan(t)}{2}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\left[t - \arctan(t)\right]_0^x = \frac{(x^2+1)\arctan(x) - x}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)\arctan(x) - x}{2}$ est une primitive de g.

c) Commençons par linéariser $\sin^3 t$. En utilisant les formules d'Euler, il vient

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i} = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} - 3\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] \\ &= \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t). \end{aligned}$$

L'application $h : t \mapsto t \sin^3(t)$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x t \sin^3(t) dt \end{cases}$$

est une primitive de h. Soit $x \in \mathbb{R}$, en posant en posant $\begin{cases} U' = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t) \\ V = t \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} U = -\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t) \\ V' = 1 \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\sin^3(t)dt &= \int_0^x t\left(\frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)\right)dt \\
&= \left[t\left(-\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t)\right)\right]_0^x - \int_0^x \frac{-3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t)dt \\
&= x\left(-\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(3x)\right) - \left[\frac{-3}{4}\sin(t) + \frac{1}{36}\sin(3t)\right]_0^x \\
&= x\left(-\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(3x)\right) - \left(\frac{1}{36}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{36}\sin(3x) + x\left(\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right)$ est une primitive de h.