CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Correction

a) On a $4t^2+4t+1=4\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2$. Dès lors, une primitive de

$$\begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{-1/2\} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{4t^2+4t+1} = \frac{1}{4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{-1/2\} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{-1/4}{t+\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

b) Pour tout réel t, on peut écrire $t^2-5t+6=(t-3)(t-2)$. On sait alors qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}, \quad \frac{1}{(t-2)(t-3)} = \frac{a}{t-2}+\frac{b}{t-3}. \tag{1}$$

En multipliant la relation (1) par $t-2$, il vient

$$\frac{1}{t-3} = a + \frac{b(t-2)}{t-3}.$$

En particulier, en spécifiant cette relation en $t=2$, il vient $a=-1$.
En multipliant la relation (1) par $t-3$, il vient

$$\frac{1}{t-2} = \frac{a(t-3)}{t-2} + b.$$

En particulier, en spécifiant cette relation en $t=3$, il vient $b=1$.
Par conséquent, une primitive de

$$\begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{2,3\} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^2-5t+6} = \frac{1}{(t-2)(t-3)} = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{2,3\} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(|t-3|) - \ln(|t-2|) = \ln\left(\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\right) \end{cases}.$$

c) On a

$$\frac{1}{t^2+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \text{ de la forme } \frac{U'}{U^2+1}$$

donc une primitive de

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^2+5} \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}.$$