CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
Correction

a) On reconnait une forme UU' dont une primitive est $\frac{1}{2}U^2$. Dès lors, une primitive de $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$ est
$$t \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(t).$$

b) On reconnait une forme $\frac{U'}{U}$ dont une primitive est $\ln|U|$. Dès lors, une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ est
$$t \mapsto \frac{1}{3}\ln(|1+t^3|).$$

c) On reconnait une forme $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$ dont une primitive est $\sqrt{U}$. Dès lors, une primitive de $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est
$$t \mapsto \sqrt{1+t^2}.$$

d) On reconnait une forme $\frac{U'}{1+U^2}$ dont une primitive est $\arctan U$. Dès lors, une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\frac{2t}{1+(t^2)^2}$ est
$$t \mapsto \frac{1}{2}\arctan(t^2).$$

e) Méthode 1 : On linéarise $\cos^3 t$. On écrit
$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}e^{3it} + \binom{3}{1}e^{2it}e^{-it} + \binom{3}{2}e^{it}e^{-2it} + \binom{3}{3}e^{-3it}\right]\\ &= \frac{1}{4}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\\ &= \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t).\end{aligned}$$
Par conséquent, une primitive de $t \mapsto \cos^3(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{12}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.
Méthode 2 : On a $\cos^3(t) = \cos(t)(1-\sin^2(t)) = \cos(t) - \cos(t)\sin^2(t)$. Or, une primitive de $t \mapsto \cos(t)$ est $t \mapsto \sin(t)$ et on reconnait une forme $U'U^2$ dont une primitive est $\frac{1}{3}U^3$. Dès lors, une primitive de $t \mapsto \cos^3(t)$ est $t \mapsto \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t)$.
Remarque : Par linéarisation, en utilisant les formules d'Euler, il vient
$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{-8i} = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} - 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right]\\ &= \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).\end{aligned}$$
Dès lors, pour tout réel t, on a
$$\begin{aligned}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) &= \sin(t) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)\right)\\ &= \frac{3}{4}\sin(t) + \frac{1}{12}\sin(3t).\end{aligned}$$