CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Correction

Soit $a \in \mathbb{R}$, la tangente à la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ passant par le point de coordonnées (a, a^2) est la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.

Soit $b \in \mathbb{R}^*$, la tangente à la courbe représentative de $x \mapsto 1/x$ passant par le point de coordonnées $(b, 1/b)$ est la droite Δ_b d'équation $y = \frac{-1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b} = \frac{-x}{b^2} + \frac{2}{b}$.

Les deux courbes admettent des tangentes communes s'il existe des réels (a, b) tels que $\mathcal{D}_a = \Delta_b$. Les droites $\mathcal{D}_a$ et Δ_b sont confondues si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{-1}{b^2}, \\ -a^2 = \dfrac{2}{b}. \end{cases}$$

Alors, en élevant au carré la première relation, il vient $4a^2 = 1/b^4$ puis en utilisant la seconde relation, on obtient $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b} \Rightarrow b^3 = -1/8 \Rightarrow b = -1/2$ car $b \neq 0$. On en déduit $a = -2$. On vérifie que le couple $(a, b) = (-2, -1/2)$ est effectivement solution du système à deux équations précédent. Il n'y a donc qu'un seul choix de (a, b) possible qui retourne la même tangente. Ce choix de a et b correspond à la droite d'équation $y = -4x - 4$ qui est l'unique tangente commune aux fonctions carrée et inverse.