CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$ car $\lambda > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme $\lambda > 0$, on a également
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. On a
$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = f(f(x)) = f(x) = x$$
donc x est solution de (E).
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ qui est solution de (E), ie $f(f(x)) = x$. Par l'absurde, si $f(x) \neq x$ alors on a soit $f(x) < x$, soit $f(x) > x$.
1^{er} cas : Si $f(x) < x$. La fonction f étant strictement croissante, il vient
$$x = f(f(x)) < f(x)$$
ce qui contredit l'hypothèse de départ.
$2^{ème}$ cas : Si $f(x) > x$. La fonction f étant strictement croissante, il vient
$$x = f(f(x)) > f(x)$$
ce qui contredit l'hypothèse de départ.
L'hypothèse $f(x) \neq x$ est ainsi absurde de quoi l'on déduit $f(x) = x$.
4. a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty.$$
Pour tout réel x, on écrit $g(x) = e^{\lambda x} - x = e^{\lambda x}\left(1 - xe^{-\lambda x}\right)$. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - xe^{-\lambda x} = 1$. Il s'ensuit
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\lambda x}\left(1 - xe^{-\lambda x}\right) = +\infty.$$
b) Les fonctions f et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a
$$g'(x) = f'(x) - 1 = \lambda e^{\lambda x} - 1.$$
c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} \geqslant \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda x \geqslant \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\ln\lambda \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{\ln\lambda}{\lambda}.$$
De plus, on calcule
$$g\left(-\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right) = e^{-\ln\lambda} + \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \frac{1+\ln\lambda}{\lambda}.$$
On obtient le tableau de variation ci-après :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On remarque que

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } & f(x) = x \text{ grâce aux questions 2 et 3,} \\ \text{ssi } & g(x) = 0. \end{aligned}$$

On déduit du tableau de variation de g le nombre de solution de l'équation $g(x) = 0$. On a :

- Si $\lambda > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\ln\lambda}{\lambda} > 0$ alors l'équation (E) ne possède pas de solution,
- Si $\lambda = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\ln\lambda}{\lambda} = 0$ alors l'équation (E) possède une unique solution qui est $-\frac{\ln\frac{1}{e}}{1/e} = e$,
- Si $0 < \lambda < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\ln\lambda}{\lambda} < 0$ alors l'équation (E) possède deux solutions distinctes.

.