

CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Correction

Supposons $f \neq id_{\mathbb{R}}$. Autrement dit, il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$. On distingue alors plusieurs cas.

Premier cas : $x_0 < f(x_0)$. La fonction f étant croissante, il s'ensuit $f(x_0) \leq f(f(x_0)) = x_0$ car $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$. Donc $x_0 < f(x_0)$ et $f(x_0) \leq x_0$. Ce cas n'a pas lieu d'être.

Deuxième cas : $f(x_0) < x_0$. La fonction f étant croissante, il s'ensuit $x_0 = f(f(x_0)) \leq f(x_0)$ car $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$. Donc $x_0 \leq f(x_0)$ et $f(x_0) < x_0$. Ce cas n'a pas non plus lieu d'être.

Par conséquent, notre hypothèse $f(x_0) \neq x_0$ est absurde. Donc, pour tout réel x , on a $f(x) = x$. Autrement dit, $f = id_{\mathbb{R}}$.