CHAPITRE V : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\frac{x^2}{1+cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\frac{\sqrt{1+2cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}$$

et

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}}{\sqrt{1+c\frac{x^2}{1+2cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}}{\frac{\sqrt{1+3cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3cx^2}}.$$

On conjecture alors, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$. On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a
$$f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+1\times cx^2}}$$
donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$. Il nous faut montrer que l'on a $f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}$. Or, on a

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \underbrace{f(f(\cdots f(f(x))\cdots))}_{n+1 \text{ fois}} = f(\underbrace{f(\cdots f(f(x))\cdots)}_{n \text{ fois}}) = f(f_n(x)) \\
&= f\left(\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}\right) \text{ par hypothèse de récurrence,} \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+c\frac{x^2}{1+ncx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\frac{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}{\sqrt{1+nx^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}} \text{ ce que l'on voulait établir.}
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence et on a ainsi établi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}.$$