CHAPITRE IV : NOMBRES RÉELS

Correction

1. On étudie les variations de $f_1 : x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$ qui vérifient $f_1'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0$ et $f_2'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$. Les fonctions f_1 et f_2 sont croissantes sur $[0, +\infty[$ avec $f_1(0) = f_2(0) = 0$ donc ces fonctions sont positives sur $[0, +\infty[$. Ceci prouve les inégalités demandées.

2. Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n} = e^{(m+n)\ln\left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)} = \underbrace{e^{(m+n)\ln\left(1+\frac{1}{m+n}\right)} \leqslant e^{\frac{m+n}{m+n}}}_{\text{car } \ln(1+x) \leqslant x} = e.$$

   En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée (par e), l'ensemble A admet une borne supérieure.

3. Sachant $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$, on déduit de la double inégalité de la première question que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e^{1-\frac{1}{2k}} = e^{k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^{\frac{k}{k}} = e.$$

   Grâce au théorème des gendarmes, il vient $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$. Comme e est un majorant de A, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments de A avec $m = n$ vérifient

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leqslant e.$$

   De plus, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leqslant e.$$

   Grâce à la caractérisation des bornes supérieures, on a $M = \sup A = e$.