CHAPITRE IV : NOMBRES RÉELS
Correction

1. Par construction de la partie entière, nous avons

$$\begin{cases} nx-1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx-1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \\ nx-n < n\lfloor x \rfloor \leqslant nx \end{cases}$$

   En faisant la différence de ces deux relations, on obtient

$$nx-1-(nx) < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < nx-(nx-n) \Leftrightarrow -1 < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < n.$$

   Par ailleurs, $\lfloor nx \rfloor$, n et $\lfloor x \rfloor$ sont entiers donc $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$ est entier. La dernière égalité peut donc se réécrire sous la forme

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

2. En divisant par n chacun des membres de l'inégalité de la question 1 et en ajoutant $\lfloor x \rfloor$, on trouve

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

   Ainsi, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[$ ou autrement dit,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

3. a) Soit $t \in [0,1[$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a donc $0 \leqslant k+t < n$ d'où $0 \leqslant \frac{k+t}{n} < 1$ puis $\left\lfloor \frac{k+t}{n} \right\rfloor = 0$. Par conséquent,

$$\forall t \in [0,1[, \quad f(t) = 0.$$

   b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(t+1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{t+1+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{t+k}{n} \right\rfloor = f(t) + \left\lfloor \frac{t+n}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t+0}{n} \right\rfloor \\ &= f(t) + \left\lfloor \frac{t}{n} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor. \end{aligned}$$

   Par ailleurs, pour tout réel x, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc

$$f(t+1) = f(t) + \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor = f(t) + 1.$$

   c) On déduit de la question précédente (par récurrence sur m) que pour tout entier m, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+m) = f(x) + m.$$

   En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et

$$f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor) = f(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

   car f est nulle sur $[0,1[$ d'après la question $3a$). Donc f coïncide avec la partie entière sur $\mathbb{R}$.

d) Grâce à la question précédente $f(nx) = \lfloor nx \rfloor$. On obtient alors immédiatement le résultat annoncé en explicitant $f(nx)$ au moyen de la définition de f.

e) En prenant $n = 2$ et $t = x$, la relation $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se réécrit sous la forme

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

ce qui est la relation demandée.