CHAPITRE IV : NOMBRES RÉELS

Correction

a) Vraie. Soient $x_1 \in \mathbb{Q}$ et $x_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Supposons $x_1x_2 \in \mathbb{Q}$. On a $(x_1, x_1x_2) \in \mathbb{Q}^2$ donc il existe $(p, p_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q, q_1) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ et } x_1x_2 = \frac{p}{q}. \text{ Donc } x_2 = \frac{p}{q}\frac{q_1}{p_1} = \frac{pq_1}{qp_1} \in \mathbb{Q}.$$

Ce qui est absurde car x_2 est supposé irrationnel. Donc x_1x_2 est irrationnel.

b) Vraie. Soient $x_1 \in \mathbb{Q}$ et $x_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Supposons $x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$. On a $(x_1, x_1 + x_2) \in \mathbb{Q}^2$ donc il existe $(p, p_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q, q_1) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ et } x_1 + x_2 = \frac{p}{q}. \text{ Donc } x_2 = \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{pq_1 - qp_1}{qp_1} \in \mathbb{Q}.$$

Ce qui est absurde car x_2 est supposé irrationnel. Donc $x_1 + x_2$ est irrationnel.

c) Faux. Par exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel, $1 - \sqrt{2}$ est irrationnel (d'après la question *b*)) et pourtant $\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 2$ est rationnel.

Il arrive cependant que la somme de deux irrationnels soit irrationnelle. Par exemple $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ est irrationnel d'après la question *a*).

d) Faux. L'inverse d'un irrationnel étant irrationnel, $1/\sqrt{2}$ est irrationnel et $\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$ est rationnel.