CHAPITRE IV : NOMBRES RÉELS

Correction

a) Par récurrence (simple).
• Pour $n = 1$, on a $1^2 = \frac{1\times2\times3}{6}$.
• On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \left[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right] + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence,} \\
&= \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6}[2n^2 + 7n + 6] \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

b) Par récurrence double.
• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 = 2\cos 0 = 2\cos(0 \times x)$.
• Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2\cos(x) = 2\cos(1 \times x)$.
• On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_n = \cos(nx)$ et $u_{n+1} = \cos((n+1)x)$. En utilisant la relation définissant (u_n), on peut écrire

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2\cos(x)u_{n+1} - u_n = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) \\
&= \cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x) - \cos(nx) \quad \text{car } 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\
&= \cos((n+2)x)
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c) Par récurrence forte.
• Pour $n = 1$, on peut écrire $n = 1 = 2^0(2\times0+1)$ donc, avec $p = q = 0$, on a bien la décomposition voulue.
• On suppose vraie notre propriété pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, ie tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ se décompose comme le produit d'une puissance de 2 et d'un impair. On considère l'entier $n+1$.

- 1^er^ cas : Si $n+1$ est impair, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1 = 2^0(2q+1)$ qui est une décomposition voulue.
- 2^ième^ cas : Si $n+1$ est pair, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k_0$. On a $k_0 = \frac{n+1}{2} \in [\![1, n]\!]$ donc il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_0 = 2^p(2q+1)$ ce qui donne $n = 2k_0 = 2^{p+1}(2q+1)$.

Dans les deux cas, on a réussi à écrire $n+1$ sous la forme du produit d'une puissance de 2 et d'un impair ce qui achève la récurrence.