CHAPITRE IV : NOMBRES RÉELS

Correction

Si $a = 0$, on a bien $\forall \varepsilon > 0$, $|a| = 0 < \varepsilon$.
Réciproquement, si $\forall \varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a \neq 0$. Posons $\varepsilon_1 = \frac{|a|}{2}$ qui est bien strictement positif car $|a|$ est supposé non nul. Par hypothèse, on a donc $|a| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow |a| < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2}$ car $|a| \neq 0$. Cette dernière inégalité étant fausse, notre hypothèse $|a| \neq 0$ est absurde et on en déduit $|a| = 0$.