CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS

Correction

a) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition de l'image directe d'un ensemble par f,

$$\exists x \in f^{-1}(B),\ y = f(x).$$

Par définition de l'image réciproque, on obtient $f(x) \in B$. Comme $y = f(x)$, il vient $y \in B$. Par conséquent, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) • Si f est surjective. On a déjà montré $f(f^{-1}(B)) \subset B$. On montre $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Soit $y \in B$. On a f surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $f(x) = y \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$. Par conséquent, on a écrit $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$ donc $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.

On obtient ainsi $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Par double inclusion, il vient $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

• Si pour toute partie B de F on a $f^{-1}(f(B)) = B$. On montre que f est surjective.

Soit $y \in F$ donc $\{y\} \subset F$. Par hypothèse, on a $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$ donc $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$. Ainsi, il existe $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset E$ tel que $y = f(x)$. On a ainsi trouvé un antécédent dans E par f à y. Il s'ensuit que f est surjective.

• On a ainsi montré

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \forall B \subset F,\ B = f\left(f^{-1}(B)\right).$$

c) On montre $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Soit $x \in A$. Dès lors, on a $f(x) \in f(A)$ donc, par définition de l'image réciproque d'un ensemble par f, on a $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi, on a bien

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

d) • Si f est injective, on a déjà $A \subset f^{-1}(f(A))$. On montre $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) \in f(A)$. Par définition de l'image directe d'un ensemble,

$$\exists a \in A,\ f(x) = f(a).$$

Or, la fonction f est injective donc $x = a \in A$.

Ainsi, on a bien $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Par double inclusion, on obtient $f^{-1}(f(A)) = A$.

• Si pour toute partie A de E, on a $f^{-1}(f(A)) = A$. On montre que f est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On pose $A = \{x_1\}$. Alors $x_1 \in A$ et on peut écrire

$$f(x_2) = f(x_1) \in f(A) \text{ donc } x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}.$$

Par conséquent, on a $x_2 = x_1$. La fonction f se retrouve être injective.

• On a ainsi montré

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \forall A \subset E,\ A = f^{-1}\left(f(A)\right).$$

e) On a montré, lors de la question a), l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Par croissance de l'image réciproque, on obtient
$$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(B).$$
Par ailleurs, en posant $A = f^{-1}(B)$, grâce à la question c), on a
$$f^{-1}(B) = A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(f^{-1}(B))).$$
Par double inclusion, il vient $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

f) On a montré, lors de la question c), l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$. Par croissance de l'image directe, on obtient
$$f(A) \subset f(f^{-1}(f(A))).$$
Par ailleurs, en posant $B = f(A)$, grâce à la question a), on a
$$f(f^{-1}(f(A))) = f(f^{-1}(B)) \subset B = f(A).$$
Par double inclusion, il vient $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.