CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS
Correction

a) • Si $g \circ f$ est injective. On montre que f est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. En composant par g, on obtient

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

La fonction $g \circ f$ étant injective, on déduit $x_1 = x_2$. Par conséquent, la fonction f est injective.

• Si $g \circ f$ est surjective. On montre que g est surjective.

Soit $y \in G$. On a $g \circ f : E \to G$ surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. On peut réécrire

$$y = g(f(x)) \text{ avec } f(x) \in F.$$

Ainsi, on a trouvé un antécédent $f(x)$ dans F à y par le fonction g. Par conséquent, la fonction g est surjective.

b) Si $g \circ f$ est injective et f surjective. On montre que g est injective.

Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tel que $g(y_1) = g(y_2)$. On a $f : E \to F$ surjective donc

$$\exists x_1 \in E, \quad y_1 = f(x_1) \quad \text{et} \quad \exists x_2 \in E, \quad y_2 = f(x_2).$$

On peut ainsi réécrire

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

La fonction $g \circ f$ étant injective, on obtient $x_1 = x_2$ puis $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Par conséquent, la fonction g est injective.

c) Si $g \circ f$ est surjective et g injective. On montre que f est surjective.

Soit $y \in F$. On a $g(y) \in G$ et $g \circ f : E \to G$ surjective donc

$$\exists x \in E, \quad g(y) = g \circ f(x).$$

On peut réécrire $g(y) = g(f(x))$ et comme g est injective, on obtient $y = f(x)$. Ainsi, on a trouvé un antécédent $x \in E$ à y par f. Par conséquent, la fonction f est surjective.

d) Si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. On a :

i) $h \circ g$ surjective donc h est surjective d'après la question a),

ii) $h \circ g$ injective donc g est injective d'après la question a),

iii) $g \circ f$ surjective donc g est surjective d'après la question a),

iv) $g \circ f$ injective donc f est injective d'après la question a).

En utilisant les résultats ii) et iii), on a g bijective.

On a $h \circ g$ injective et g surjective (d'après iii)) donc h est injective d'après la question b). En combinant avec le résultat i), on obtient que h est bijective.

On a $g \circ f$ injective et g injective (d'après ii)) donc f est surjective d'après la question c). En combinant avec le résultat iv), on obtient que f est bijective.