CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS
Correction

a) Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition de l'image directe, on a

$$\exists x \in A \cap B,\ y = f(x).$$

Or $x \in A$ et $x \in B$ donc on peut écrire

$$y = f(x) \text{ avec } x \in A, \quad \text{d'où } y \in f(A) \text{ et } y = f(x) \text{ avec } x \in B, \quad \text{d'où } \ y \in f(B).$$

Par conséquent, on a $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ donc $y \in f(A) \cap f(B)$. On a ainsi montré

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

b) Si f est injective.

• On a déjà montré $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

• On montre $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.

On a $y \in f(A)$ donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. De même, on a $y \in f(B)$ donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Ainsi, on peut écrire

$$f(x_1) = y = f(x_2).$$

La fonction f étant supposée injective, il s'ensuit $x_1 = x_2$. En posant $x_0 = x_1 = x_2$, on a $x_0 \in A \cap B$ et $y = f(x_0)$. Par conséquent, on obtient $y \in f(A \cap B)$.

Ainsi, on a $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

• Par double inclusion, on obtient $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.