CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS

Correction

a) Les tableaux ci-dessous représentent les fonctions f et g. On a

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f(n)$	1	2	3	4	5	$\cdots$

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
$g(n)$	0	0	1	2	3	$\cdots$

• On montre que f est injective mais pas surjective.

Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. On a $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1+1 = n_2+1 \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective. On remarque que 0 ne possède pas d'antécédent par f dans $\mathbb{N}$ donc f n'est pas surjective, ni bijective.

• On montre que g est surjective mais pas injective.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a $m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et on peut écrire $g(m + 1) = (m + 1) - 1 = m$ donc g est surjective. On remarque que $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective, ni bijective.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = g(n) + 1 = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ (n-1) + 1 = n \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

et $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$.